PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 10. 2. December 1899. 1. Jahrgang.

INHALT.

Originalmitteilungen.

A. Sommerfeld, Theoretisches über die Beugung der Röntgenstrahlen. S. 105.

I. Klemenčič, Untersuchungen über permanente Magnete.
II. Über die Abhängigkeit des Induktionskoefficienten vom Dimensionsverhältnisse. S. 111.

Mitteilungen aus dem physikalischen Institute der Universität Groningen (Direktor H. Haga).
No. 2. C. H. Wind, Zur Demonstration einer von E. Mach entdeckten optischen Täuschung. S. 112.

St. Meyer u. E. R. v. Schweidler, Über das Verhalten von Radium und Polonium im magnetischen Felde. II. Mitteilung. S. 113.

A. Heydweiller, Über den inneren Druck in wässerigen Salzlösungen. S. 114.

Zusammenfassende Bearbeitungen.

W. Voigt, Neuere Untersuchungen über die optischen Wirkungen eines Magnetfeldes I. Teil. S. 116.

Referate.

Zweigverein der deutschen Gesellschaft für Mechanik und Optik in Göttingen. S. 120.

Tagesereignisse. S. 120.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Theoretisches über die Beugung der Röntgenstrahlen.

Von A. Sommerfeld. (Vorläufige Mitteilung.)

Seitdem es feststeht, dass die Kathodenstrahlen aus fortgeschleuderten Elektronen, Teilchen von sehr geringer Masse und starker elektrischer Ladung, bestehen, hat eine Auffassung über das Wesen der Röntgenstrahlen sehr an Wahrscheinlichkeit gewonnen, welche zuerst von E. Wiechert[1]) und Sir George Stokes[2]) ausgesprochen und von J. J. Thomson[3]) weiter ausgeführt und begründet ist: dass nämlich die Röntgenstrahlen als eine impulsive (d. h. kurze und starke) Gleichgewichtsstörung des Äthers anzusehen sind, welche durch die plötzliche Hemmung der von den Kathodenstrahlen mitgeführten Ladungen hervorgerufen wird, und welche sich nach den Maxwellschen Gleichungen zeitlich und räumlich fortpflanzt.

Zur Prüfung dieser Auffassung dürften sich die Beugungserscheinungen ganz besonders eignen. Indessen nützen diesbez. Beobachtungen wenig, solange man sie nicht mit einer exakten Theorie vergleichen kann. Ich habe mir daher, auf Anregung meines Freundes E. Wiechert, die Aufgabe gestellt, eine Beugungstheorie für impulsive Ätherstörungen zu entwickeln und bemerke noch, dass dieselbe Theorie auch für die Akustik der Geräusche (nicht die der musikalischen Töne) eine gewisse Bedeutung hat.

Da die gewöhnliche Beugungstheorie wesentlich den periodischen Charakter der Äthererregung voraussetzt und überdies nur näherungsweise und nur unter den in der Optik vorliegenden Verhältnissen gültig ist, so war ich auf andere, exakte Methoden[1]) angewiesen, welche ich früher für den Fall der Optik auseinandergesetzt habe und die sich auf den vorliegenden Fall übertragen lassen. Es handelte sich darum, 1) ein scharfes mathematisches Problem zu formulieren, 2) das Integral des Problems zu finden, 3) das Resultat geometrisch und numerisch zu discutieren. Daran schliessen sich 4) und 5) Entwickelungen, welche auf die Verwertung etwa anzustellender oder schon vorhandener Beobachtungen zielen.

1. Das Problem ist folgendes: Der Schirm sei eine unendlich dünne, für die elektromagnetische Störung undurchlässige (d. h. unendlich stark absorbierende) Halbebene. Die gerade Kante desselben stehe senkrecht auf der xy-Ebene und gehe durch den Anfangspunkt $x = y = 0$. Der ursprüngliche und also auch jeder folgende Zustand sei in jeder zur Schirmkante parallelen (zur xy-Ebene senkrechten) Geraden der nämliche, hänge also ausser von t nur von x und y ab; er lässt sich dann durch Angabe der beiden zur Schirmkante parallelen Komponenten der elektrischen und magnetischen Kraft vollständig beschreiben, indem die senkrechten Komponenten aus jenen durch einfache Differentiationen abgeleitet werden können. Be-

1) Abh. der Phys.-ökon. Ges. zu Königsberg, 1896, S. 1, sowie Wied. Ann. Bd. 59, S. 283, 1896, vergl. besonders § 6.
2) Proc. of the Cambridge Phil. Soc., Bd. 9, S. 215, 1896, und Proc. of Manchester Liter. and Phil. Soc. 1897.
3) Phil. Magazine. Febr. 1898.

1) Math. Ann. Bd. 47, S. 317. 1896.

zeichnet u eine der beiden parallelen Komponenten und V die Lichtgeschwindigkeit, so folgt aus den Maxwellschen Gleichungen zunächst die Differentialgleichung für u:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right). \tag{1}$$

Ferner hat man längs des Schirmes, bei dem vorausgesetzten Schirmmaterial, die Oberflächenbedingungen:

$$\begin{cases} u = 0, \text{ wenn } u \text{ die par. Komp. d. elektr. Kraft,} \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \text{ magn.} \quad \text{"} \; . \end{cases} \tag{2}$$

Soweit enthält das Problem noch nichts für die Röntgenstrahlen Charakteristisches. Dies liegt lediglich in den hinzuzufügenden Anfangsbedingungen. Wir müssen uns u und $\frac{\partial u}{\partial t}$ in der ganzen xy-Ebene für irgend einen Zeitmoment, sagen wir für die weit zurückliegende Zeit $t = -T$ geben. Und zwar werden wir dieses so bequem wie möglich bewerkstelligen.

Sehen wir zunächst von dem Vorhandensein des Schirmes, also von den Bed. (2) ab, so ist ein der Gl. (1) genügender Zustand durch

$$u = f(x + Vt)$$

gegeben. Definieren wir die willkürliche Funktion f so, dass sie nur für ein kurzes Wertegebiet ihres Argumentes, z.B. in der Nähe des Wertes $x + Vt = 0$, von Null verschieden ist, so haben wir einen einmaligen kurzen Impuls vor uns; wählen wir sie dagegen als periodische Funktion (z. B. gleich sin), so liegt der Fall der gewöhnlichen Optik vor. Im ersteren Fall werden wir von einem ebenen Impulse sprechen, so wie man in der Optik von einer ebenen Welle redet, weil in beiden Fällen die Flächen gleichen u's Ebenen (senkrecht zur x-Achse) sind. Einem ebenen Impulse entspricht z. B. die Annahme

$$f(z) = e^{-k^2 z^2}, z = x + Vt,$$

falls k eine grosse Zahl ist. (Vgl. die punktierte Kurve in Fig. 1.) Statt dessen können wir

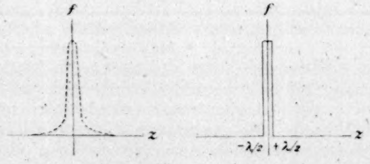

Fig. 1.

aber auch f irgendwie graphisch, am einfachsten durch die nebenstehende Rechtecksform von der geringen Breite λ und der Höhe 1 geben. In der xy-Ebene beschränkt sich dann die Störung auf einen schmalen geradlinigen Streifen von der Breite λ senkrecht zur x-Achse, welcher sich in der Richtung der abnehmenden x mit Lichtgeschwindigkeit fortschiebt.

Bei Anwesenheit des Schirmes ist dieser „ebene Impuls" natürlich unmöglich. Es handelt sich gerade darum, die durch den Schirm bewirkte Modifikation desselben (die Beugung) zu berechnen. Den Anfangszustand aber können und wollen wir genau so wählen, wie bei diesem ebenen Impuls. Wir wollen also festsetzen:

$$\begin{cases} u = f(x + Vt) \\ \frac{\partial u}{\partial t} = Vf'(x + Vt) \end{cases} \text{ für } t = -T. \tag{3}$$

Der Anfangszustand besteht dann aus einer Störung, welche sich zur Anfangszeit $t = -T$ in der grossen Entfernung $x = VT$ von der Schirmkante befindet und auf einen schmalen Streifen senkrecht zur x-Achse beschränkt ist.

2. Wie die Gl. (1) unter den Bed. (2) und (3) zu integrieren ist, wolle man in der ausführlichen Darstellung, die für Math. Ann. Bd. 53 oder 54 vorbereitet wird, nachlesen. Hier nur das Resultat:

Wir machen die Spur des Schirmes zur Achse eines Polarkoordinatensystems (r, φ), so dass die eine Seite des Schirmes durch $\varphi = 0$, die andere durch $\varphi = 2\pi$, die Schirmkante urch $r = 0$ gegeben ist. Der Einfallsrichtung des ursprünglich ebenen Impulses, die wir vorher zur x-Achse nahmen, entspreche der Winkel φ', so dass $x = r\cos(\varphi - \varphi')$ wird. (Um zu verhindern, dass unsere Störung schon anfangs mit dem Schirm kollidiert, können wir φ' zwischen $\pi/2$ und $3\pi/2$ voraussetzen.)

Wir haben nun in der xy-Ebene drei Gebiete zu unterscheiden (vgl. Fig. 2), in denen

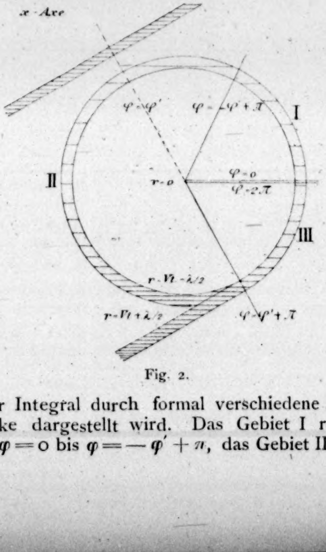

Fig. 2.

unser Integral durch formal verschiedene Ausdrücke dargestellt wird. Das Gebiet I reicht von $\varphi = 0$ bis $\varphi = -\varphi' + \pi$, das Gebiet II von

$-\varphi' + \pi$ bis $+\varphi' + \pi$, das Gebiet III von $+\varphi' + \pi$ bis 2π. Die Grenze zwischen II und III kann man bezeichnen als Grenze des geometrischen Schattens für die einfallende Störung, die Grenze zwischen I und II spielt dieselbe Rolle für eine Störung, die man sich durch Reflexion an der Schirmoberfläche aus der einfallenden entstanden denken kann. Setzen wir noch zur Abkürzung

$$(4) \quad v(\varphi') = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(-r\cos ib + Vt)\frac{db}{\cos\frac{1}{2}(ib + \varphi - \varphi')},$$

wo i die imaginäre Einheit und b eine Integrationsvariable bedeutet, so schreibt sich die Lösung folgendermassen:

$$(5) \begin{cases} \text{in I}: u = f(r\cos(\varphi - \varphi') + Vt) + v(\varphi') \\ \qquad \pm f(r\cos(\varphi + \varphi') + Vt) \pm v(-\varphi'), \\ \text{in II}: u = f(r\cos(\varphi - \varphi') + Vt) + v(\varphi') \pm v(-\varphi'), \\ \text{in III}: u = v(\varphi') \pm v(-\varphi'): \end{cases}$$

Das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem u die elektrische oder magnetische Kraftkomponente parallel dem Schirmrande bedeutet, je nachdem also die erste oder zweite der Gl. (2) gilt. Der erste Term der rechten Seite in I und II bedeutet die einfallende Störung und ist mit $f(x + Vt)$ identisch. Der dritte Term in I stellt eine scheinbar aus dem Innern des Schirmes kommende, d. h. eine reflektierte Störung dar. Die Glieder $v(\varphi')$ und $v(-\varphi')$ geben den gebeugten Bestandteil der Erscheinung (gebeugte einfallende und gebeugte reflektierte Störung).

Man wird unschwer verifizieren, dass die angegebenen Ausdrücke den Bedingungen (1), (2) und (3) genügen. Dass sie sich überdies an der Grenze I II und II III stetig aneinanderschliessen, und dass der eine Ausdruck die analytische Fortsetzung des anderen darstellt, ist dagegen aus der vorstehenden Form der Lösung nicht leicht zu ersehen; dies folgt aber aus einer komplexen Form des Integrals, die ich hier unterdrücke.

Ich muss jetzt noch eine Änderung an der gefundenen Lösung vornehmen. Dabei habe ich eine Frage zu streifen, die auch für die Grundlagen der Optik wichtig ist. Bekanntlich operiert die Optik mit dem Begriff des schwarzen Körpers, d. h. eines Mittels, welches das Licht weder durchlässt noch zurückwirft. Es ist aber, wie ich mich überzeugt habe, unmöglich, den Begriff des schwarzen Körpers durch einfache Grenzbedingungen im Sinne der Maxwellschen oder irgend einer anderen Lichttheorie zu definieren. Die Bed. (2) entsprechen jedenfalls nicht dem absolut schwarzen, sondern dem absolut reflektierenden (dem absolut blanken Körper, wie es P. Drude gelegentlich zu mir ausdrückte). In der That kommt denn auch in (5) ein Bestandteil vor, den wir schon als reflektierte Störung ansprachen. Ich lasse es dahingestellt, ob man nicht in der Optik mit dem absolut blanken Körper ebensogut arbeiten könnte, wie mit dem üblichen schwarzen. Jedenfalls aber können wir in der Theorie der Röntgenstrahlen den blanken Körper nicht brauchen. Denn man beobachtet bei Röntgenstrahlen nur eine eigenartige diffuse Reflexion, welche für die photographische Wirkung nicht in Betracht kommen dürfte, und wird daher annehmen müssen, dass sich gegenüber den Röntgenstrahlen jedes undurchlässige Mittel wie ein schwarzer Körper verhalte. Die reguläre Reflexion, wird man sich vorstellen, wird durch die atomistische Konstitution der Elektricität im Innern des schwarzen Körpers vernichtet.

Wie kann man nun diesem Umstande in der Lösung (5) Rechnung tragen? Einfach so, dass man diejenigen Terme streicht, die sich als reflektierte, von dem Schirm ausgehende Störung kennzeichnen. Es ist dieses ein Vorschlag, den W. Voigt[1]) anlässlich meiner oben genannten Arbeit gemacht und den er selbst bei einer Weiterführung[2]) dieser Arbeit befolgt hat. Der schwarze Körper wird dann einfach zu einem Diaphragma, in dem die Licht- bez. Röntgenstrahlung verschwindet. Dass auch hierdurch keine mathematisch ganz befriedigende und von Willkür freie Definition des schwarzen Körpers gewonnen wird, dass vielmehr das Problem dadurch seine eindeutige Bestimmtheit verliert, hat schon Herr Voigt auseinandergesetzt; doch scheint dieses in der Natur der Sache, d. h. im Begriff des schwarzen Körpers begründet zu sein.

Unsere Lösung (5) vereinfacht sich daraufhin wie folgt:

$$(6) \begin{cases} \text{in I + II}: u = f(r\cos(\varphi - \varphi') + Vt) + v(\varphi'), \\ \text{in III} \quad : u = v(\varphi'). \end{cases}$$

In den Gebieten I und II haben wir nunmehr lediglich einfallendes und gebeugtes, in III nur gebeugtes Röntgenlicht.

Übrigens gelange ich bei der oben nicht ausgeführten Integration des Problems in erster Linie zu dieser Lösung (6); aus ihr setze ich die Lösung (5) durch „Spiegelung" an der Schirmoberfläche zusammen.

3. Bei der folgenden numerischen Discussion setze ich zur Abkürzung $\psi = \varphi - \varphi' - \pi$, so dass ψ den (von der Schattengrenze aus gezählten) sogen. Beugungswinkel bedeutet, und lege für f die Rechtecksform aus Fig. 1 zu Grunde. Dann lässt sich das Integral (4) elementar ausführen und man erhält:

1) Kompendium der theor. Physik. Bd. II, S. 768.
2) Gött. Nachr. 1899, Heft 1.

$$
(7)\quad \begin{cases} \text{wenn} \quad r > Vt + \lambda/_2 \\ v = 0, \\ \text{wenn} \quad Vt + \lambda/_2 > r > Vt - \lambda/_2 \\ v = \frac{1}{\pi} \, arctg \sqrt{\frac{Vt - r + \lambda/_2}{r(1 - \cos\psi)}}, \\ \text{wenn} \quad Vt - \lambda/_2 > r \\ v = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{r(1 - \cos\psi)}{Vt - r}} \, \frac{1}{Vt - r\cos\psi}. \end{cases}
$$

Die Bedeutung dieser Formeln, von denen die dritte eine für unsere Zwecke ausreichende Näherung darstellt, während die beiden ersten genau sind, wird klar werden, wenn wir in zeitlicher Reihenfolge die Schicksale des vom Unendlichen her auf den Schirmrand hinwandernden Impulses auf Grund dieser Formeln schildern.

Das streifenförmige Störungsgebiet befindet sich anfangs (für $t = -T$) in grosser Entfernung $r = VT$ vom Schirmrande. Während es auf diesen mit Lichtgeschwindigkeit zueilt, ist von einer Beugung zunächst nichts zu bemerken; es ist $v = 0$ [s. die ersten Zeilen von (7)], da Vt und auch $Vt + \lambda/_2$ zunächst negativ, mithin in jedem Punkte der xy-Ebene kleiner als der betr. positive Wert r ist. In dem Momente $Vt = -\lambda/_2$ reicht die Störung mit ihrer Front an die Schirmkante heran, in dem Momente $Vt = +\lambda/_2$ ist sie über diese hinweggegangen. Der Impuls teilt sich nun; die eine Hälfte läuft an dem Schirme entlang und entschwindet daselbst, die andere schreitet im Gebiete II fort und schneidet dabei (vgl. Fig. 2) mit der Schattengrenze ab.

Gleichzeitig beginnt sich aber vom Schirmrande ein anderer Impuls, der gebeugte, fortzupflanzen. Derselbe geht radial vom Schirmrande nach allen Richtungen gleichzeitig vor und kann daher im Gegensatz zu dem immer in der gleichen Richtung φ fortschreitenden ebenen Impulse als Cylinderimpuls bezeichnet werden. Derselbe hält längs der Schattengrenze mit dem ebenen Impulse gleichen Schritt, da er sich gleichfalls mit Lichtgeschwindigkeit fortpflanzt, und bildet sozusagen eine Fortsetzung des ursprünglichen Impulses ins Innere des Schattengebietes (vgl. Fig. 2). Nach aussen hin ist unser Cylinderimpuls durch den Kreis $r = Vt + \lambda/_2$, nach innen durch den Kreis $r = Vt - \lambda/_2$ begrenzt. Im Innern des so entstehenden Ringes wird er durch die dritte und vierte Zeile von (7) gegeben.

Ins Äussere des Kreises $r = Vt + \lambda/_2$ ist zur Zeit t noch keine gebeugte Störung gelangt, entsprechend den ersten Zeilen von (7). Im Innern des anderen Kreises $r = Vt - \lambda/_2$ dagegen hat unser Cylinderimpuls ein gewisses „Residuum“ zurückgelassen, welches durch die beiden letzten Zeilen von (7) bestimmt wird. Dasselbe ist im Verhältnis zur einfallenden Störung sehr gering, weil es mit dem kleinen Faktor λ behaftet ist. Auf der Schattengrenze selbst ist es direkt gleich Null (wegen des Faktors $\sqrt{r[1 - \cos\psi]}$) und nimmt von da aus nach dem Kreise $r = Vt - \lambda/_2$ hin zu (wegen des Faktors $(Vt - r)^{-1/2}$).

Auch unser Cylinderimpuls ist in einiger Entfernung von der Schattengrenze klein gegen die einfallende Störung, weil der Zähler in dem Argument des $arctg$ auf dem ganzen Kreisringe nicht grösser wie λ ist; der $arctg$ selbst wird also von der Grössenordnung $\sqrt{\lambda}$, während die einfallende Störung die Grösse 1 hat. Anders in nächster Nähe der Schattengrenze. Hier verschwindet nämlich der Nenner im Argument des $arctg$; das Argument wird ∞, der $arctg$ gleich $\pm\frac{\pi}{2}$ und v gleich $+\frac{1}{2}$ oder $-\frac{1}{2}$, je nachdem wir uns der Schattengrenze von dem Gebiete III oder II her nähern. Die Grösse des Cylinderimpulses erleidet also an der Schattengrenze einen Sprung von der Grösse 1, welcher gerade den plötzlichen Abfall des ebenen Impulses (von 1 auf 0 beim Übergange von II zu III) aufhebt. In der Schattengrenze selbst wird somit der ebene Impuls durch die Beugung auf die Hälfte reduziert.

Wollen wir die Grösse des Cylinderimpulses, unter Absehung vom Vorzeichen, modellieren, so würden wir etwa das Bild von Fig. 3 erhalten. Wir haben auf dem Kreisringe zwischen

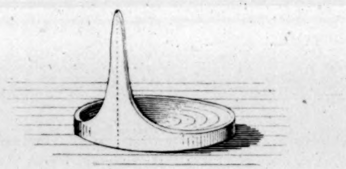

Fig. 3.

$r = Vt - \lambda/_2$ und $r = Vt + \lambda/_2$ einen Wall zu errichten, welcher an seiner höchsten Stelle, in der Schattengrenze, die Höhe $1/_2$ hat und welcher von da nach den Seiten hin schnell abfällt. Nach aussen sind die Wände des Walls sehr steil, nach innen, wo sich das „Residuum“ ansetzt, fallen sie sanfter ein. Cylinderimpuls und Residuum würden zusammen den Eindruck eines Kraters (mit einer zackenartigen Erhebung in der Schattengrenze) machen. Wollen wir auch das Vorzeichen berücksichtigen, so müssten wir im Gebiete I + II den Wall nach unten, und nur im Schattengebiete III, sowie in der Figur angedeutet, nach oben hin auftragen.

Noch ein Wort über die Schnelligkeit, mit

der die Grösse des Cylinderimpulses von der Schattengrenze aus nach den Seiten hin abnimmt. Diese hängt lediglich von dem Werte λ/r ab; sie ist um so grösser, je kleiner dieser Wert ist. Für die mittelste Faser ($r = Vt$) des Kreisringes wird sie durch die Fig. 4 gegeben. Die Abscissen bedeuten den Wert von ψ (wobei $\psi > 0$ vorausgesetzt), die Ordinaten den Wert von v oder was bei $\psi > 0$ dasselbe

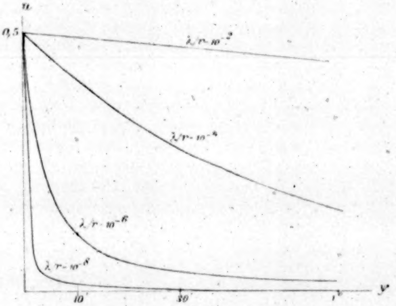

Fig. 4.

ist, den von u. Die vier Kurven in Figur 4 entsprechen den Werten $\lambda/r = 10^{-8}$, 10^{-6}, 10^{-4}, 10^{-2} und sind für $0 < \psi < 1$ konstruiert.

Mit wachsendem t erweitert sich unser Krater beständig. Er zieht dabei das Residuum in seinem Innern hinter sich her, welches immer weitere Flächen einnimmt und dabei an Grösse abnimmt, und schreitet gleichzeitig mit dem an der Schattengrenze abbrechenden ebenen Impulse vor, bis sich beide für $t = \infty$ im Unendlichen verlieren, wo sich das Residuum zu Null abgeflacht hat.

4. Wir kommen nun zu den physikalischen Folgerungen unserer Theorie.

Die augenfälligste ist die, dass die Beugung zugleich mit der Breite des Impulses abnimmt. Bei unendlich kurzem Impulse haben wir eine absolut scharfe Schattengrenze, wie schon J. J. Thomson[1]) angegeben; je weniger jäh der Impuls ist, desto weiter breitet sich die Störung in das Gebiet des geometrischen Schattens aus (vgl. Fig. 4), und desto ergiebiger wird auch der Zustand ausserhalb des eigentlichen Schattengebietes durch Anwesenheit des Schirmes beeinflusst. Unsere Impulsbreite λ spielt also eine ähnliche Rolle wie die Wellenlänge λ der Optik, wo es ja eine absolut scharfe Schattengrenze auch nur bei unendlich kleinem λ giebt.

Dabei tritt der folgende, leicht verständliche Unterschied zu Tage: In der Optik haben wir in der Nähe der Schattengrenze Maxima und Minima, bei unseren impulsiven Störungen dagegen einen ununterbrochenen, mehr oder minder steilen Abfall.

Offenbar werden die kurzen Impulse eine stärkere Durchschlagskraft gegenüber absorbierenden Medien besitzen wie die länger ausgedehnten, während die längeren, wie wir sahen, die Beugung besser erkennen lassen. Es sind also gerade diejenigen Röntgenstrahlen, die sich für die eigentliche Radiographie am besten eignen, für Beugungsbeobachtungen am ungeeignetsten.

Aus der oben cit. Theorie von J. J. Thomson geht hervor, dass die ganz kurzen Impulse nur zu erwarten sind, wenn die dieselben erzeugenden Kathodenstrahlen nahezu Lichtgeschwindigkeit haben, und dass die Dauer des Impulses zunimmt, wenn sich die Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen von der Lichtgeschwindigkeit entfernt. Letzteres erreicht man bekanntlich durch geringere Verdünnung des Kathodenraumes. Indem man also der Reihe nach verschiedene Verdünnungsgrade herstellt, erhält man verschiedene Sorten von Röntgenstrahlen; von diesen müssen die den höchsten Verdünnungsgraden entsprechenden fast gar nicht, die den niedrigsten am meisten gebeugt werden. Gerade durch den Vergleich der mit verschiedenen Strahlensorten erhaltenen Beugungsbilder dürfte sich unsere Hypothese über die Natur der Röntgenstrahlen am ehesten prüfen lassen.

Diese Folgerungen qualitativer Art sind jetzt nach der quantitativen Seite hin zu ergänzen. Unsere Absicht ist dabei, das Beugungsbild, wie es eine hinter dem Schirm befindliche photographische Platte entwirft, so weit vorherzubestimmen, dass man durch den Vergleich mit der Beobachtung die Impulsbreite λ der zur Verwendung gekommenen Röntgenstrahlen berechnen kann.

Unsere bisherigen Entwickelungen bedürfen zu dem Zweck noch der Vervollständigung; denn es ist nicht die bisher berechnete (elektrische oder magnetische) Kraft u, welche die Wirkung auf der photographischen Platte bestimmt, sondern die elektromagnetische Energie, u. zw. der Gesamtbetrag derselben, welcher in der Zeit von $-\infty$ bis $+\infty$ auf die betr. Stelle der Platte fällt. Wir wollen annehmen, dass die elektrische Erregung parallel der Schirmkante polarisiert ist und dass allein die elektrische (nicht auch die magnetische) Energie photographisch wirksam ist. (Sonst würde die Rechnung etwas umständlicher, das Resultat aber nicht wesentlich geändert werden.) Ferner wollen wir annehmen, dass die photographische Platte das Feld ihrerseits nicht stört.

1) l. c. S. 182.

Die in irgend einem Punkte (r, ψ) wirksame Energie ist dann gegeben durch

$$\frac{1}{8\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dt .$$

Für den einfallenden, durch den Schirm noch nicht modifizierten Impuls ist dies Integral, bei der in Fig. 1 vorausgesetzten Gestalt und Grösse des Impulses, gleich $\tau/8\pi$, wo $\tau = \lambda/V$ die Dauer des Impulses ist. Wir wollen nun als „relative Intensität" I das Verhältnis der Energie des ursprünglichen zu der des modifizierten Impulses bezeichnen, also

$$I = \frac{V}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dt$$

setzen. In den von direktem Röntgenlicht beschienenen Gebieten I + II wird dann I nahezu $= 1$, auf der Schattengrenze haben wir genau $I = 1/4$. Um I im Schattengebiet III zu bestimmen, hat man den Wert von u aus den Gl. (7) zu entnehmen und die Integration auszuführen. Die etwas umständliche Rechnung liefert:

$$(8)\qquad I = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1+s}{s}\, arctg^2 \sqrt{s} - \frac{2}{\sqrt{s}}\, arctg \sqrt{s} + \frac{\log(1+s)}{s} + \frac{s}{4}\log\frac{s+2}{s} - \frac{s}{2(s+2)}\right),$$

wo $s = \lambda / r(1 - \cos\psi)$ gesetzt ist. Ist nun der Abstand r_0 der photographischen Platte von der Schirmkante n-mal so gross wie λ und bedeutet ς den Abstand eines Punktes der Platte von der Schattengrenze, so ergiebt sich leicht mit hinreichender Näherung:

$$(9)\qquad \varsigma = \sqrt{\frac{2 r_0 \lambda}{s}} = \sqrt{\frac{2n}{s}}\;\lambda .$$

Indem man nun für s eine hinreichende Anzahl von Werten einsetzt, kann man I als Funktion von ς, letzteres in Vielfachen von $\lambda\sqrt{n}$ gemessen, zeichnen (vgl. die folgende Fig. 5). Wie man sieht, spielt sich der Abfall der Intensität wesentlich zwischen $\varsigma = 0$ und $\varsigma = \lambda\sqrt{n}$ ab, in welchem Intervalle I von $1/4$ bis $1/15$ abnimmt. Von da aus läuft die Intensitätskurve ziemlich horizontal, indem sie sich asymptotisch der ς-Achse nähert.

Dies vorausgeschickt, können wir die oben gestellte Aufgabe lösen: aus dem experimentell erhaltenen Beugungsbild auf die Impulsbreite λ zu schliessen.

Wir denken uns auf der photographischen Platte die genaue Grenze des geometrischen Schattens bestimmt und messen von dieser aus nach dem Schattengebiete hin die Breite ς' desjenigen Streifens, auf welchem eine photographische Wirkung noch gerade bemerkbar ist. Dabei wollen wir etwa annehmen, dass $1/15$ der Intensität der direkten Strahlung noch eine gerade merkbare Wirkung hervorruft. (Natürlich ist die Zahl $1/15$ in hohem Masse willkürlich; man wird sie mit Rücksicht auf die Empfindlichkeit der Platte und die Mittel, die man zum Bemerkbarmachen der photographischen Wirkung anwendet, in jedem besonderen Falle geeignet abzuändern haben.) Nun entspricht nach Fig. 5 der relativen Intensität $1/15$ als

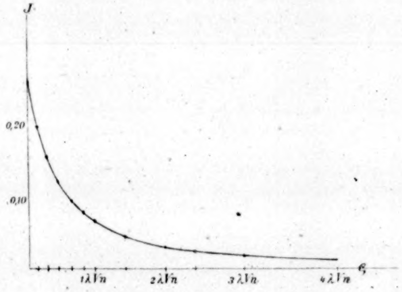

Fig. 5.

Abscisse der Wert $\lambda\sqrt{n}$. Dieser ist mit der gemessenen Breite ς' zu identifizieren. Wir haben also die Gleichung

$$(10)\qquad \varsigma' = \lambda\sqrt{n} = \sqrt{r_0 \lambda} \quad \text{oder} \quad \lambda = \varsigma'^2 / r_0 ,$$

aus welcher λ berechnet werden kann.

5. Bekanntlich ist es kürzlich den Herren H. Haga und C. H. Wind[1]) gelungen, einen Beugungseffekt bei Röntgenstrahlen einwandfrei nachzuweisen. Als Beugungsschirm diente ein schmaler, nach unten sich verengender Spalt, dessen obere Breite 14 μ, dessen untere nur 2 μ betrug. Der Beugungseffekt bestand darin, dass das Bild des Spaltes auf einer photographischen Platte nicht in demselben Maasse nach unten abnahm, wie der Spalt selbst, ja sich schliesslich wieder zu verbreitern schien. Die Verfasser sprechen auch von Maximis und Minimis, die sich am unteren Ende des Bildes einstellen sollen. Da diese aber aus der beigegebenen Nachbildung nicht ersichtlich sind, glaube ich hiervon absehen zu dürfen.

Nun ist es klar, dass das Beugungsbild eines Spaltes etwas anderes ist, wie die Summe der Beugungsbilder, welche die beiden den Spalt formierenden Halbebenen einzeln geben würden, ja dass auch das Beugungsbild an einer bestimmten Stelle des sich verjüngenden Spaltes

1) Amsterdamer Akademie, April 1899, S. 420 = Wied. Ann. 68, S. 884, 1899. Bei der Deutung ihrer Versuche stellen sich die Verf. auf den Standpunkt, dass die Röntgenstrahlung ein periodischer Vorgang im Äther sei, u. zw. ein rein periodischer Vorgang (l. c.) oder ein in gewisser Weise unregelmässig periodischer (C. Wind, Wied. Ann., 68, S. 896).

anders ausfallen wird, wie an einem durchweg parallelen Spalt von der Breite der betr. Stelle. Indessen ist es mir bisher nicht gelungen, den parallelen (geschweige denn den sich verjüngenden) Spalt befriedigend zu behandeln. Ich bin daher gezwungen, an die fraglichen Beobachtungen mit der obigen, auf die Halbebene zugeschnittenen Theorie heranzugehen.

Die Breite des Beugungsbildes am unteren Ende des Spaltes in Versuch 2 (Fig. 2) von Haga und Wind beträgt ca. 0,1 mm. Da die Breite der geometrischen Projektion des Spaltes auf der photographischen Platte hierneben nicht in Betracht kommt, so werden wir diese 0,1 mm ganz auf Rechnung der Beugung setzen, u. zw. die eine Hälfte durch Beugung an der einen, die andere durch Beugung an der anderen Halbebene des Spaltes entstanden denken. Hiernach wäre $c' = {}^1/_{20}$ mm. Ferner ist r_0 (bei Haga und Wind b genannt) gleich 75 cm. Wir erhalten also nach (10):

$$\lambda = \frac{1}{400 \cdot 750}\text{ mm} = {}^1/_3 \cdot 10^{-5}\text{ mm} = 3{,}3\,\mu\mu\,.$$

Die von Haga und Wind verwendeten Röntgenstrahlen würden hiernach eine Impulsbreite von einigen Millimikron besessen haben.

Nach der cit. Thomsonschen Theorie müsste die Impulsbreite $\geqq$ dem Durchmesser der Kathodenpartikelchen sein (= nur in dem Grenzfalle, wenn die Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen die Lichtgeschwindigkeit ist und die Hemmung an der Röhrenwand plötzlich erfolgt). Nehmen wir an, dass die Grösse der Kathodenpartikelchen, entsprechend ihrer geringeren Masse, etwa gleich dem zehnten Teile des Durchmessers der Wirkungssphäre eines ponderabeln Moleküls ist (d. h. dass sie nach der Schätzung Lord Kelvin's[1]) zwischen $\frac{1}{100}$ und $\frac{1}{500}\,\mu$ liege), so haben wir zu erwarten

$$\lambda > \frac{1}{500}\,\mu.$$

Der oben gefundene Wert von λ steht also mit der Thomsonschen Betrachtung nicht in Widerspruch.

Wir betonen nochmals, dass unsere Theorie nicht ohne Bedenken auf die Haga-Windschen Beobachtungen bezogen werden darf. Zuverlässige Schlüsse werden sich aus den Beugungserscheinungen erst dann ergeben, wenn es gelingt, entweder das Experiment auf die Halbebene oder die Theorie auf den Spalt auszudehnen.

Clausthal, November 1899.

(Eingegangen 7. Novbr. 1899.)

1) Vgl. Natural Philosophy, Part. II, App. F.

Untersuchungen über permanente Magnete.

II. Über die Abhängigkeit des Induktionskoefficienten vom Dimensionsverhältnisse.[1])

Von Ignaz Klemenčič.

Legt man einen Magnet vom Momente M mit seiner Achse in die Richtung der Horizontalkomponente des Erdmagnetismus X, so wird sein Moment

$$= M + aX \text{ oder } = M(1 \pm \beta X),$$

wo $\beta = \frac{a}{M}$ von Lamont als Induktionskoefficient bezeichnet wird.

Kohlrausch drückt den Induktionskoefficienten in anderer Weise aus. Nach ihm bedeutet der Induktionskoefficient die Veränderung des specifischen Magnetismus, resp. die Vermehrung oder Verminderung des magnetischen Moments der Masseneinheit, welche durch die Einheit der magnetisierenden oder entmagnetisierenden Kraft hervorgebracht wird.

Hinsichtlich der Abhängigkeit des Induktionskoefficienten von den Eigenschaften und der Beschaffenheit des Magnets sagt Lamont ganz allgemein, dass der Induktionskoefficient um so kleiner ausfällt, je härter und dünner ein Magnet ist. Auch F. Kohlrausch macht in seinem „Leitfaden der praktischen Physik" 8. Aufl. S. 378 die allgemeine Bemerkung, dass der Induktionskoefficient von Gestalt, Härte, chemischer Beschaffenheit abhängt und für unmagnetisches Material etwas grösser ist als für magnetisiertes.

Ich untersuchte die in der ersten Abhandlung[2]) benutzten 18 Magnetstäbe auch hinsichtlich des Induktionskoefficienten bei drei verschiedenen Feldstärken (1·07; 0·46 und 0·12 abs. E.) und zwar für den magnetischen und unmagnetischen Zustand der betreffenden Probestücke. In der nachfolgenden Tabelle sind die Resultate verzeichnet. Es bedeutet darin:

Bez. die Bezeichnung des Magnets wie in der ersten Abhandlung.

V das Dimensionsverhältnis.

M das magnetische Moment in abs. E.

G das Gewicht in Grammen.

Δ_o und Δ_g den Induktionskoefficienten nach Kohlrausch für den unmagnetischen, resp. magnetischen Zustand.

$\delta\,\%$ den Unterschied dieser Induktionskoefficienten in Prozenten.

Δ_m den Induktionskoefficienten nach Weber, jedoch nicht auf die Horizontalkomponente, sondern auf die Einheit der Feldstärke bezogen.

1) Sitzungsberichte der Kais. Akad. der Wiss. in Wien. Bd. 108, 1899, S. 989.

2) Diese Zeitschrift, No. 9, S. 89.

Bez.	V	M		Δ_o	Δ_g	δ%	Δ_m
45,4	9·9	112	5·0	0·172	0·176	—2	0·00792
45,6	15·2	291	7·5	0·217	0·217	0	0·00556
45,8	20·6	510	9·7	0.252	0·241	+4	0·00458
45,10	25·4	766	12·0	0·268	0·247	+9	0·00386
45,15	37·7	1380	18·7	0·297	0·248	+19	0·00337
UI,4	10·1	122	5·1	0·180	0·181	0	0·00756
UI,6	15·2	303	7,5	0·222	0·225	—1	0·00559
UI,8	20·8	531	9,4	0·252	0.244	+3	0·00429
UI,10	25·3	802	12.3	0·263	0.247	+6	0·00379
UI,15	37·8	1454	18·2	0·302	0·247	+22	0·00310
00,4	10·3	137	4·9	0·141	0.140	0	0·00502
00,6	15·5	310	7·3	0·158	0·158	0	0·00374
00,8	20·3	512	9·8	0·178	0·163	+9	0·00312
00,10	25.6	742	12·1	0·183	0·158	+16	0·00257
00,15	37·6	1310	18·7	0·197	0·154	+28	0·00221
45,3	5·0	63·5	5·0	0·112	0·113	—1	0·0147
45,6	10·1	362	10·1	0·188	0·191	—1	0.00881
45,9	15·2	910	15·2	0·294	0·300	—2	0·00815

Die Werte des Induktionskoefficienten, wie sie bei den drei Feldstärken gefunden wurden, waren nicht weit verschieden, daher sind in der Tabelle die Mittelwerte angeführt. Aus der Tabelle geht hervor, dass der auf die Gewichtseinheit bezogene Induktionskoefficient bei Dimensionsverhältnissen von circa 45 bis 15 für unmagnetisches Material grösser ist als für magnetisiertes; die Differenz nimmt jedoch mit dem Dimensionsverhältnis ab.

Betrachten wir den Einfluss des Dimensionsverhältnisses, so haben wir bei den Stahlsorten „45" und „UI" nahezu konstante Werte des Induktionskoefficienten Δ_g für die Dimensionsverhältnisse 37,5—15; von da ab bis 5 nehmen dieselben ab. Die Werte von Δ_m d. h. die auf das permanente Moment bezogenen Induktionskoefficienten nehmen jedoch mit abnehmendem Dimensionsverhältnis beträchtlich zu.

Bei den Stahlsorten „00" ergiebt sich wieder wie bei den Temperaturkoefficienten eine schwach ausgeprägte Anomalie, und zwar für die Magnete 00,15 und 00,10. Diese Anomalie wird wie bei den Temperaturkoefficienten auf eine Verschiedenheit in der Härtung zurückzuführen sein.

Schliesslich habe ich noch einige Versuche über die Abhängigkeit des permanenten Moments von der Art der Unterbrechung des magnetisierenden Feldes gemacht. Es wird mehrfach empfohlen behufs Erreichung eines möglichst hohen Moments das magnetisierende Feld nur langsam abnehmen zu lassen und nicht rasch zu unterbrechen. Es entsteht die Frage, wieviel man am Moment profitiert, wenn man diese Regel befolgt. Die angestellten Versuche haben gelehrt, dass bei dünneren Magneten (16 mm ^{2} Querschnitt) und den in der Praxis üblichen Dimensionsverhältnissen ausserordentlich wenig gewonnen wird. Der Gewinn beträgt circa 1 — 2 Prozent beim Dimensionverhältnis 10 und nur etwa 0·1 bis 0·2 Prozent beim Dimensionsverhältnis 37·5.

Die Zunahme des Moments macht sich erst bei grösseren Querschnitten bemerkbar. So war das Moment eines 10 cm langen Stabes von 100 mm ^{2} Querschnitt bei langsamer Abnahme um 7·2 Prozent grösser als bei rascher Unterbrechung. Dass hierbei auch der spec. Widerstand der Stahlsorte eine Rolle spielt, ist mit Rücksicht auf die Foucaultschen Ströme leicht erklärlich.

(Eingegangen 9. Novbr. 1899.)

Mitteilungen aus dem physikalischen Institute der Universität Groningen (Direktor H. Haga).

2. Zur Demonstration einer von E. Mach entdeckten optischen Täuschung.

Von C. H. Wind.

Ich erlaube mir eine sehr einfache Versuchsanordnung zu beschreiben, welche gestattet, die gelegentlich der Beugungsversuche mit Röntgenstrahlen von mir gefundene und an anderer Stelle[1]) ausführlich mitgeteilte, thatsächlich aber schon von Herrn E. Mach entdeckte[2]) optische Täuschung in ganz überraschender Weise zu demonstrieren.

Man stelle zwei Spalte auf, den einen in einer Entfernung von wenigen Centimetern (etwa 2 oder 3) von dem anderen. Zur Beleuchtung projiziere man mittels einer Sammellinse (Kondensor des Projektions-Apparates) auf den ersten Spalt das Bild einer beliebigen Lichtquelle, welches aber eine genügende Ausdehnung haben muss. Das durch diesen Spalt hindurchgelassene Licht falle auf den zweiten Spalt und erzeuge von demselben ein Bild auf einem 3 oder 4 m entfernten Projektionsschirm.

Hat man den zweiten Spalt 2 bis 3 mm breit genommen und lässt man dann den etwa mikrometrisch verstellbaren Lichtspalt allmählich von Null an bis auf einige Millimeter sich verbreitern, so sieht man an den Rändern des Bildes die bekannten Beugungsfransen, welche, bei genügender Parallelität der Spalte, anfangs zur Beobachtung gelangen, alsbald aber verschwinden; gleichzeitig sieht man an jedem Rande des Bildes einen hellen Streifen entstehen und sich vom Rande entfernen. Die beiden Streifen nähern sich dabei der Mitte des Spaltbildes und sie fahren, jeder für sich, in ihrer Bewegung fort, auch nachdem sie bei einer bestimmten Breite des Lichtspaltes in der Mitte des Spaltbildes einen Augenblick zusammen-

1) Proc. Roy. Acad. of Sc. Amst., 7, S. 7, 1898. — Vgl. auch Wied. Ann. 68, S. 886, 1899 und diese Zeitschrift, No. 9, S. 91.

2) Wiener Sitzungsberichte 2. Abt. 52, S. 303, 54, S. 131 u. 393, 57, S. 11, 1866 — 68.

gefallen sind. Eben nur bei diesem Zusammenfallen aber (und etwa sofort nach ihrer Entstehung aus dem ersten Beugungsmaximum am Rande) entsprechen die beobachteten Streifen einem wirklichen Lichtmaximum. In jeder anderen Lage sind sie bloss Produkte der erwähnten optischen Täuschung.

Den Mangel an Realität demonstriert man am einfachsten in der Weise, dass man mit einem mattschwarzen Schirme (von erheblich geringerer Höhe als das Spaltbild) von aussen seitlich an einen der Streifen heranfährt und dabei die eine der Zonen des Überganges zwischen dem dunkeln Grunde und dem maximal beleuchteten mittleren Teile des Spaltbildes allmählich verdeckt. Ist man mit dem schwarzen Schirme nahe an dem Streifen angelangt, so sieht man dort denselben stellenweise in überraschender Weise verschwinden, womit sich erweist, dass das Helligkeitsmaximum nur scheinbar ist und der benachbarten Übergangszone seine Entstehung verdankt.

Noch schöner fast fällt der Versuch aus, wenn man an die Stelle des zweiten Spaltes eine Stricknadel aufgestellt und dabei wiederum für genügende Parallelität derselben mit dem Lichtspalte Sorge getragen hat, und dann die allmähliche Verbreiterung des Spaltes vornimmt.

Der Schatten der Nadel erscheint anfangs beiderseitig von Beugungsfransen gesäumt; diese verschwinden bald und es entstehen an der Aussenseite des Schattens die sich immer weiter davon entfernenden hellen Streifen des vorigen Versuches. Der Kernschatten aber verschmälert sich fortwährend bei der Verbreiterung des Spaltes und löst sich, nachdem er schliesslich zu einem einzigen tiefdunkeln Streifen zusammengeschrumpft ist, in zwei dunkle Streifen, (scheinbare) Helligkeitsminima auf, welche sich jetzt allmählich von einander entfernen; der Schatten der Nadel erscheint wie verdoppelt.

In ähnlicher Weise wie oben überzeugt man sich wieder leicht mittels des schwarzen Schirmes davon, dass auch diese dunkeln Streifen eine optische Täuschung sind.

Die erwähnten scheinbaren Helligkeitsmaxima und -minima lassen sich auch beobachten an den photographischen Spalt- und Nadelbildern, welche man in den obigen Versuchen entsprechender Weise erhält, wenn man als Strahlenquelle eine Röntgen-Röhre benutzt und den Projektionsschirm durch eine photographische Platte ersetzt. Es sind aber die dann beobachteten Streifen dieselben, welche von den Herren **Fomm**, **Precht**, **Maier** u. a. als Beugungs-, resp. Interferenzstreifen gedeutet wurden.

Groningen. C. H. Wind.

(Eingegangen 11. Novbr. 1899.)

Über das Verhalten von Radium und Polonium im magnetischen Felde. (II. Mitteilung.)

Von Stefan Meyer und Egon R. v. Schweidler.

Wir haben in unserer ersten Mitteilung[1]) die Frage offen gelassen, ob das magnetische Feld auf das Emissionsvermögen von Radium wirkt oder die Strahlen ablenkt. In Übereinstimmung mit einigen uns inzwischen brieflich mitgeteilten Resultaten der Herren **Giesel**, **Elster** und **Geitel** haben wir das letztere nunmehr konstatiert.

Ein in Papier gewickeltes Radiumbaryumchlorid-Präparat erscheint im Dunkeln infolge der Fluorescenz des Papieres leuchtend. Im magnetischen Felde wird die Intensität des Leuchtens nicht merklich verändert, hingegen verschwindet beim Erregen unseres Feldes die Fluorescenz auf einem einige Centimenter davor befindlichen Baryumplatincyanür-Schirm vollständig.

Befestigt man das Präparat unmittelbar auf der Rückseite des Schirmes, so sieht man im Dunkeln einen scharf begrenzten Fleck von den Dimensionen des Präparates und zwar in unserem Falle ein Rechteck, dessen Längsseiten parallel der Verbindungslinie der Magnetpole liegen. Bringt man nun den Schirm in ein magnetisches Feld [— wir erhielten ein sehr ausgedehntes, ziemlich homogenes von beträchtlicher Feldstärke bei unserem Elektromagneten nach Entfernung der Polschuhe —], so tritt beim Erregen desselben in der Umgebung eine Aufhellung ein in Form von zwei breiten verwaschenen Streifen, die von dem hell leuchtenden Rechteck durch einen dunkeln Zwischenraum getrennt sind (Fig. 1). Je stärker das

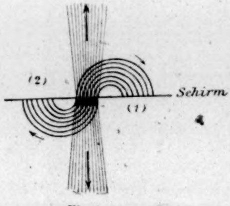

Fig. 1.

Fig. 2.

Feld, desto schmäler wird der dunkle Raum. Je nachdem die obere oder untere Seite des Präparates durch einen undurchsichtigen Körper verdeckt wird, verschwindet der vordere helle Streifen (1) oder der hintere (2). Ein Bleiklotz, der an die Unterseite des Schirmes unter (1) gelegt wird, ändert die Lichterscheinung nicht, unter (2) gebracht, wirft er einen deutlichen Schatten. Es werden also die durch die beiden Seiten des das Präparat umschliessenden Papiercouvertchens ursprünglich annähernd senkrecht

1) Diese Zeitschr. No. 9, S. 90.

nach oben und unten austretenden Strahlen im Felde umgebogen (Fig. 2), und zwar ist der Sinn der Krümmung derselbe wie der eines biegsamen Stromleiters, in dem ein negativer Strom im Sinne der Strahlen fliesst. Die Strahlen verhalten sich also ganz analog wie Kathodenstrahlen.

Bringt man das Präparat so an den Pol, dass die von der breiten Fläche desselben ausgehenden Strahlen ungefähr die Richtung der Kraftlinien haben, und bringt gegenüber am anderen Pol (bei uns in einer Distanz von 16 cm) den Schirm an, so erscheint, solange das Feld nicht erregt ist, eine schwache gleichmässige Fluorescenz des ganzen Schirmes. Wird das Feld eingeschaltet, so bildet sich das Präparat ziemlich scharf auf dem Schirme ab, und die Verbindungslinie von Objekt und Bild ist die Richtung der Kraftlinien. Umkehr der Feldrichtung alteriert die Erscheinung nicht.

Es lässt sich dies aus den Ablenkungserscheinungen erklären, indem die Strahlen, welche parallel den Kraftlinien gehen, unbeeinflusst bleiben, die, welche dieselben schneiden, zu Schraubenlinien um sie herumgewickelt werden.

Poloniumreste auf einem Filter (Präparat des Herrn Giesel) zeigten qualitativ dasselbe Verhalten.

Da bei den Kathodenstrahlen eine gewisse Beziehung zwischen Ablenkbarkeit und Durchdringungsfähigkeit zu bestehen scheint, so haben wir durch Aluminium- und Kupferblech filtrierte Radiumstrahlen auf ihre Ablenkbarkeit untersucht, aber bisher keinen Unterschied gegenüber denjenigen, die bloss durch Papier gegangen waren, gefunden.

Wien, Physik. Inst. d. Univ., Novbr. 1899.

(Eingegangen 18. Novbr. 1899.)

Über den inneren Druck in wässerigen Salzlösungen.

Von Adolf Heydweiller.

Bekanntlich sind die Eigenschaften wässeriger Salzlösungen nicht additiv aus denen der Komponenten zu berechnen; vielmehr treten Änderungen (des Volumens, der Wärmekapacität u. s. w.) auf, zwischen denen ein Zusammenhang öfter vermutet worden ist. Es soll nachstehend versucht werden, aus allgemeineren Beziehungen ihn abzuleiten und zwar auf Grund folgender Annahmen:

1. Durch die Auflösung eines Salzes in Wasser wird der innere Druck des letzteren vermehrt, sei es durch Molekularkräfte, sei es, wie die Herren Drude und Nernst vermuten,[1]) durch Elektrostriktion.

2. Diese innere Druckvermehrung bedingt die Änderungen, welche die Eigenschaften der Lösungen gegenüber den additiv aus den Eigenschaften der Komponenten berechneten Werten aufweisen.

3. Die Eigenschaften des gelösten Körpers sind, der van t'Hoffschen Theorie entsprechend, die eines Gases bei dem osmotischen Drucke.

4. Die Wirkung, welche die Vermehrung des inneren Druckes im Lösungsmittel auf die Eigenschaften des gelösten Körpers ausübt, ist zu vernachlässigen.

Die letztere Annahme, welche notwendig ist, um die Berechnungen durchführen zu können, wird offenbar bei verdünnten Lösungen mit ausreichender Genauigkeit erfüllt sein, bei konzentrierteren aber zu Abweichungen von der Wirklichkeit führen. Sie kommt darauf hinaus, dass wesentlich nur die durch vermehrten inneren Druck geänderten Eigenschaften des Lösungsmittels, des Wassers, für die Änderungen in den Eigenschaften der Lösung in Betracht kommen.

Die Berechtigung der vorstehenden Annahmen und der durch sie gegebene Zusammenhang zwischen den verschiedenen Eigenschaftsänderungen soll in der Weise geprüft werden, dass aus den beobachteten Werten der letzteren die entsprechenden Vermehrungen des inneren Druckes in Lösungen verschiedener Konzentration berechnet und miteinander verglichen werden. Diese Berechnungen sind auf vier verschiedenen Wegen durchgeführt worden.

1. Kapillarkonstanten. Der innere Druck einer Flüssigkeit ist nach van der Waals proportional der Laplaceschen Kapillarkonstanten H und mithin auch der Oberflächenspannung; die relative Änderung der letzteren durch Auflösen von Salz in Wasser ist also gleich der entsprechenden relativen Änderung des inneren Drucks. Sind also α und α_0 die Oberflächenspannung von Lösung und reinem Wasser, K der innere Druck in letzterem, so ist die berechnete Druckvermehrung durch Auflösen

$$p_1 = K\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0}.$$

Nach van der Waals[1]) ist für Wasser etwa $K = 10000$ Atm.

2. Kompressibilität. Nach den Untersuchungen von Amagat nimmt die Kompressibilität des Wassers in erheblichem Masse mit steigendem äusseren Druck ab; ebenso sinkt die Kompressibilität von Salzlösungen mit wachsender Konzentration, nach unseren Annahmen infolge des vermehrten inneren Drucks; eine Vergleichung der Kompressibilität der Lösungen mit der des komprimierten Wassers führt daher unmittelbar zur Kenntnis der Druckvermehrung durch die Auflösung unter der sehr wahrscheinlichen Voraussetzung, dass innerer und äusserer Druck gleiche Wirkung haben.

Dabei ist zu bemerken, dass die Kompressi-

1) Drude und Nernst, Zeitschr. f. physik. Chem. 15, 79, 1894.

1) J. D. van der Waals, Die Kontinuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes. Leipzig 1881. S. 165.

bilitätskoefficienten der Lösungen $\beta = \frac{1}{v}\frac{dv}{dp}$ auf das Volum der Lösung bezogen, nach unseren Annahmen aber auf das Volum des in der Lösung enthaltenen Wassers zu beziehen sind. Die beobachteten Werte von β sind daher mit dem Korrektionsfaktor $\frac{1000}{1000 - m \cdot \varphi}$ zu versehen, wo m die Zahl der Gramm-Moleküle des gelösten Körpers im Liter Lösung und φ das wirkliche Molekularvolumen des gelösten Körpers in der Lösung ist; bei unserer Unkenntnis bezüglich des letzteren habe ich versuchsweise das aus dem spec. Gewicht im festen Zustande sich ergebende Molekularvolumen zu Grunde gelegt; ein zu grosses φ würde die hier ermittelten Werte des inneren Druckes p_2 zu klein ergeben.

3. Volumänderung beim Auflösen. Beruht dieselbe auf der Kompression des Lösungsmittels durch gesteigerten inneren Druck, so hat man für letzteren $\Delta p_3 = \frac{1}{\beta}\frac{\Delta v}{v}$, wobei man für den Kompressibilitätskoefficienten β, wie für die relative Volumänderung die auf das Volum der Lösung bezüglichen Werte einsetzen kann, da die Reduktion beider auf das in der Lösung befindliche Wasser entgegengesetzt gleiche Korrektionen ergiebt. Die Berechnung von $\frac{\Delta v}{v}$ aus dem spec. Gewicht und dem Molekülgehalt der Lösung setzt wieder die Kenntnis des Molekularvolumens φ des gelösten Körpers voraus, über das dieselbe Annahme wie unter 2 gemacht wird. Aber hier ergiebt ein zu grosses Molekularvolum auch zu grosse Werte des berechneten Druckes. Man könnte versucht sein, das Molekularvolumen φ so zu ermitteln, dass die nach 2. und 3. berechneten Druckwerte übereinstimmen. — Da β vom Drucke abhängig ist, habe ich die Druckunterschiede Δp_3 schrittweise von den verdünnteren zu den konzentrierteren Lösungen fortschreitend berechnet.

4. Änderung der Wärmekapacität. Hier führt die Beziehung der Thermodynamik $\frac{dC_p}{dp} = -\vartheta \frac{\partial^2 v}{\partial \vartheta^2}$,[1]) in der C_p die Wärmekapacität bei konstantem Druck und ϑ die absolute Temperatur bedeuten, zu einer Berechnung der Druckänderungen bei der Auflösung, die, wie die vorige, wegen der Veränderlichkeit von $\frac{\partial^2 v}{\partial \vartheta^2}$ schrittweise vorzunehmen ist. Es folgt

$$\Delta p_4 = -\frac{\Delta C_p \cdot 41{\cdot}3}{\vartheta \frac{\partial^2 v}{\partial \vartheta^2}},$$

wenn C_p in gr-Kalorien, p_4 in Atmosphären bestimmt werden und ΔC_p die Änderung der Wärmekapacität beim Auflösen bedeutet. Zur Berechnung von ΔC_p ist die Kenntnis der Wärmekapacität des gelösten Körpers in der Lösung erforderlich. Ich setze dafür unseren Voraussetzungen entsprechend die Wärmekapacität des gasförmigen Körpers bei konstantem Volumen, da der gelöste Körper bei Erwärmung der Lösung eine merkliche äussere Arbeit nicht leistet. Vernachlässigt wird dabei die Änderung der inneren Energie des gelösten Salzes, insbesondere die elektrolytische Dissociationsarbeit. Diese Berechnung giebt daher bei grösseren Konzentrationen zu kleine Werte der inneren Drucke. —

Nur für wenige Salzlösungen liegen die Beobachtungsdaten in ausreichender Vollständigkeit und Genauigkeit vor; am besten noch für NaCl- und KCl-Lösungen, für welche ich die Ergebnisse der Berechnung in nachstehender Tabelle gebe. Die Beobachtungen sind möglichst auf nahe gleiche Temperatur (18^0—20^0) zurückgeführt. Wo mehrere gute Bestimmungen derselben Grösse vorliegen, sind Mittelwerte genommen. Die nach 1—4 in Atmosphären berechneten Druckwerte p_1 bis p_4 sind schliesslich auf gleiche abgerundete Molekülzahlen m im Liter Lösung interpoliert worden.

Tabelle. (Drucke in Atmosphären.)

m	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
			NaCl		
0,5	118	106	108	135	52
1,0	223	261	211	207	91
1,5	328	453	309	261	124
2,0	433	620	397	305	150
3,0	689	865	566		190
4,0	931	1100	720		212
5,0	1212	1381	861		234
			KCl		
0,5		72	108	184	55
1,0	223	166	222	327	101
1,5	320	308	317	501	144
2,0	414	440	405	612	181
3,0	638	649	577	709	243
4,0	859	790	734		

Die berechneten Werte sind für gleiche Konzentrationen von derselben Grössenordnung; die erheblichen Abweichungen sind wohl auf die Unsicherheit der Berechnungen zurückführbar, die bei den verdünnteren Lösungen hauptsächlich in den Beobachtungen, bei den konzentrierteren in der Unrichtigkeit der gemachten Voraussetzungen liegt. Eine kleine Änderung des angenommenen Molekularvolumens φ für NaCl (29.5 anstatt 27.2) würde die Werte p_2 und p_3 sowohl untereinander wie mit p_1 in bessere Übereinstimmung bringen. Die am stärksten abweichenden Werte p_4 sind auch die unsichersten von allen.

Ich habe weiter versucht, die Drude-Nernstsche Annahme, dass die Druckvermehrung auf Elektrostriktion durch die Ionen beruhe, zu prü-

1) M. Planck, Thermodynamik. Leipzig 1897. S. 115.

fen, und die hiernach zu erwartenden Druckwerte p_5 in folgender Weise zu berechnen.

Ich nehme an, dass das Feld eines jeden Ion sich ungestört von benachbarten Ionen oder Molekülen ausbilden könne, was natürlich wiederum nur bei verdünnten Lösungen annähernd zutreffen kann.

Ist e die Ladung eines Ions, δ die Dielektricitätskonstante der Umgebung, so ist die Feldstärke im Abstande r

$$F = \frac{e}{\delta r^2} \text{ (elektrostatisch),}$$

und der für die Druckänderung in Betracht kommende Mittelwert des Quadrates von F

$$\overline{F^2} = \frac{1}{v}\int F^2 dv = \frac{3}{4\pi(r_1^3 - r_0^3)}\int_{r_0}^{r_1} 4\pi r^2 F^2 dr$$

$$= \frac{3e^2}{\delta^2(r_1^3 - r_0^3)}\int_{r_0}^{r_1}\frac{dr}{r^2} = \frac{3e^2}{\delta^2 r_1 r_0 (r_1^2 + r_0^2 + r_1 r_0)},$$

wenn r_0 den Radius des Ions, r_1 den halben mittleren Abstand zwischen zwei Ionen bedeuten.

Daraus folgt der durch Elektrostriktion erzeugte mittlere Druck:

$$p_5 = \frac{\delta \overline{F^2}}{8\pi} = \frac{3e^2}{8\pi\delta r_1 r_0 (r_1^2 + r_0^2 + r_1 r_0)}.$$

Der numerischen Berechnung lege ich die von Herrn O. E. Meyer[1]) für die Grösse, den Abstand und die Zahl der Gasmoleküle gegebenen Werte zu Grunde und setze entsprechend:

$$r_0 = 1.10^{-8} \text{ cm}, \quad r_1 = 13\sqrt[3]{\frac{0{,}0448}{2m\gamma}} \,.\, 10^{-8} \text{ cm},$$

worin γ den elektrolytischen Dissociationsgrad des gelösten Salzes bedeutet, und $e = 2{,}4 \,.\, 10^{-10}$ (c. g. s. elektrostat.).

Es ergeben sich dann die unter p_5 in der Tabelle verzeichneten Werte, die zwar kleiner als die übrigen, aber von derselben Grössenordnung sind. Ihr langsameres Ansteigen mit wachsender Konzentration erklärt sich aus der zunehmenden Wirkung, welche die Nachbarionen auf das Feld eines Ions ausüben, und welche hier vernachlässigt ist.

Ferner ist zu beachten, dass die Werte von r_1 und e aus dem für r_0, der höchstens der Grössenordnung nach sichergestellt ist, abgeleitet sind, und sich mit diesem derart ändern, dass für ein doppelt so grosses r_0 auch p_5 etwa den doppelten Wert erhält; eine bessere numerische Übereinstimmung desselben mit den übrigen p-Werten ist also gar nicht zu erwarten.

Ich habe auch versucht, aus den gemachten Voraussetzungen die Abweichung der elektrolytischen Dissociation der wässerigen Salzlösungen vom Massenwirkungsgesetze abzuleiten.

In der bekannten Dissociationsgleichung für binäre Elektrolyte:

$$\frac{m\gamma^2}{1-\gamma} = k$$

hängt die rechte Seite bekanntlich vom Druck ab; da nun dieser nach obigem mit der Konzentration des Salzes oder der Ionen veränderlich ist, so muss k Funktion von m oder $m \cdot \gamma$ sein. Setzt man $k = \sqrt{k_1 \cdot m\gamma}$ oder $= \sqrt{k_1 \cdot m}$, so erhält man die van t'Hoffsche[1]) oder Rudolphische[2]) Formel. Indessen scheinen die auf diese Weise zu errechnenden Wirkungen quantitativ nicht auszureichen. Die Druckvermehrungen müssten bei den kleineren Konzentrationen wenigstens zwei- bis dreimal so gross sein wie die oben berechneten.

Zu bemerken ist schliesslich, dass die vorstehenden Betrachtungen sich nicht unbeschränkt verallgemeinern lassen. Die Oberflächenspannungen verschiedener Säure-, sowie von Ammoniaklösungen sind kleiner als die des Wassers und nehmen mit steigender Konzentration ab[3]); hier müssen also andere Verhältnisse mitspielen.

Breslau, November 1899.

(Eingegangen 19. Novbr. 1899.)

1) O. E. Meyer, Kinetische Theorie der Gase. 2. Aufl. Breslau 1899. S. 332 ff.

1) van t'Hoff, Zeitschr. f. physik. Chem. 18, 300, 1895.
2) Rudolphi, ebenda 17, 385, 1895.
3) Vergl. Quincke, Pogg. Ann. 160, 371, 1877; Röntgen und Schneider, Wied. Ann. 29, 202, 1886; Forch, Wied. Ann. 68, 801, 1899.

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Neuere Untersuchungen über die optischen Wirkungen eines Magnetfeldes.[1])

Von W. Voigt.

I. Teil.

Michael Faraday, dem man die erste Auffindung einer Einwirkung des Magnetismus auf eine fortgepflanzte Lichtwelle, nämlich die Entdeckung der magnetischen Drehung der Polarisationsebene, verdankt, hat in seinen letzten Lebensjahren auch nach einem Einfluss des gleichen Agens auf das Verhalten einer

1) Die Entdeckung Zeemans und die weiteren sich daran knüpfenden Arbeiten haben das Interesse der physikalischen Welt in hohem Masse erregt. Ein Bericht über das neue Gebiet schien daher den Herausgebern der Zeitschrift angezeigt zu sein. Herr W. Voigt hat unserer Bitte um eine solche zusammenfassende Darstellung in freundlichster Weise entsprochen. Die Herausgeber.

Lichtquelle gesucht.[1]) Er stellte eine durch das Chlorid von Natrium, Barium, Strontium oder Lithium gefärbte Flamme zwischen die Pole eines kräftigen Elektromagneten und untersuchte, ob ihr Spektrum bei der Erregung desselben irgend welche Änderungen erlitte. Der Erfolg dieser Versuche war ein absolut negativer.

Das Experiment ist 23 Jahre später von dem belgischen Physiker Fiévez[2]) wiederholt worden. Dieser bemerkte dabei eine „Selbstumkehr" der Natriumlinien, die er übrigens nicht der direkten Wirkung des Magnetismus zuschrieb, und die vermutlich dadurch entstanden ist, dass die Flamme im Magnetfeld plattgedrückt und in der Richtung normal zu den Kraftlinien verbreitert wird.

Abermals 11 Jahre später wandte sich ein junger holländischer Physiker, P. Zeeman, der sich zuvor mit der quantitativen Untersuchung der Wirkung einer Magnetisierung von Metallspiegeln auf das reflektierte Licht (des sog. Kerr-Phänomen) beschäftigt hatte, derselben Frage zu. In seinem Unternehmen bestärkte ihn die Nachricht von dem vergeblichen Versuche Faradays und die Erwägung der grossen Fortschritte, die seit Faradays Zeit, zumal mit Hilfe der trefflichen Rowlandschen Diffraktionsgitter, die Spektroskopie gemacht hat.

Er untersuchte das Spektrum einer Natrium- oder Lithiumflamme, die sich zwischen den Polen eines Elektromagneten befand, und bemerkte eine deutliche Verbreiterung der betr. gelben oder roten Spektrallinien bei Erregung des Magneten.[3]) Mit dem Blick des wahren Talentes erkannte er die ausserordentliche Tragweite der gemachten unscheinbaren Entdeckung und zögerte nicht, sie allseitig prüfend zu verfolgen.

Zeeman stellte im Verlaufe dieser Untersuchung zunächst fest, dass, wie das Kirchhoffsche Gesetz von der Proportionalität zwischen Emissions- und Absorptionsvermögen verlangt, dem vorbeschriebenen direkten Phänomen ein inverses entspricht, dass nämlich die Linien des Absorptionsspektrums des Natriumdampfes sich genau so verhalten wie diejenigen des Emissionsspektrums; er zeigte auch durch geeignete Veränderungen der Anordnung seines Experimentes, dass das in beiden Fällen erzielte Resultat nicht von sekundären Einwirkungen herrühre, sondern wirklich einen direkten Einfluss eines Magnetfeldes auf das Emissions- und Absorptionsvermögen glühender Dämpfe beweise. Das Bandenspektrum, welches Joddampf als Absorptionsmittel bei niedriger Temperatur zeigt, wurde im Magnetfeld nicht merklich verändert; gleiches galt von dem Emissionsspektrum des glühenden Erbiumoxyds. Die Erscheinung der Verbreiterung der Spektrallinien ist also jedenfalls nur unter gewissen Umständen in merklicher Stärke vorhanden.

Nachdem soweit im wesentlichen das blosse Experiment zur Wirkung gebracht war, gelang ein weiterer überaus bedeutungsvoller Fortschritt der nunmehr rechtzeitig einsetzenden Theorie, und, wie in so manchen ähnlichen Fällen, gerade einer mit ganz speciellen Voraussetzungen arbeitenden Theorie.

Der geistvolle Leidener theoretische Physiker H. A. Lorentz hat eine Theorie der Elektrodynamik entwickelt,[1]) welche die elektrischen Ströme als fortschreitende Bewegungen elektrisch geladener überaus feiner ponderabler Teilchen („Ionen" im weiteren Sinne des Wortes) auffasst und gemäss der Grundhypothese über die elektromagnetische Natur des Lichtes in einer Lichtquelle Schwingungen solcher Teilchen annimmt. Damit diese Schwingungen möglich seien, müssen die Ionen in den Lichtquellen Centralkräften unterliegen, und es ist die denkbar einfachste Vorstellung, diese Kräfte von den ponderabeln Molekülen ausgehend anzunehmen, deren Massen gegenüber denjenigen der Ionen sehr gross, und deren Bewegungen gegenüber denjenigen der Ionen demgemäss so klein gedacht werden dürfen, dass sie überhaupt ignoriert werden können.

Hieraus folgt dann die Möglichkeit, dass die Ionen innerhalb des Systems von Molekülen stabile Gleichgewichtslagen einnehmen können, und dass, bei kleinen Ablenkungen aus denselben, Kräfte entstehen, welche sie in jene Lage zurücktreiben und welche den Ablenkungen proportional sind.

Das Problem der freien Bewegung eines Ion ist dadurch auf ein bekanntes Problem der Centralbewegung zurückgeführt; seine Lösung ergiebt eine elliptische Bahn, deren Gestalt, Grösse und Lage mit den Anfangsbedingungen wechselt, und eine Umlaufszeit, die nur von der absoluten Grösse der bei einer bestimmten Ablenkung erregten Kraft abhängig ist. Wenn alle Ionen der Lichtquelle gleichwertige Gleichgewichtslagen besitzen, d. h. bei gleichen Ablenkungen gleiche Kräfte erfahren, so schwingen sie sämtlich mit gleichen Perioden; in diesem Falle ist das ausgesandte Licht einfarbig. Um mehrfarbiges Licht zu ergeben, müssen nach der zu Grunde gelegten Vorstellung verschiedene

1) Bence Jones, Faraday's Life. II. S. 449, 1870.
2) M. Fiévez, Bull. de l'Acad. des Scienc. Belg. (3), 9, p. 381, 1885.
3) P. Zeeman, Versl. Kon. Akad. van Wet. Amsf. Oktober 1896; Communications from the phys. Lab. Leiden No. 33, 1896.

1) H. A. Lorentz, Arch. Neérl. 25, S. 190, 1892; Versuch einer Theorie der elektr. u. opt. Erscheinungen, Leiden 1895.

Ionen verschiedenwertige Gleichgewichtslagen besitzen.

Wird nun ein schwingendes Ion der Wirkung eines Magnetfeldes ausgesetzt,[1]) so erleidet seine Bewegung eine Änderung. Um deren Art zunächst ohne Heranziehung der Differentialgleichungen zu übersehen, ist es am bequemsten, die Projektionen der Bewegung auf die Richtung der Kraftlinien des Feldes und auf eine dazu normale Ebene in Betracht zu ziehen. Erstere ist eine geradlinige, letztere eine elliptische Schwingung mit einer der ursprünglichen gleichen Periode.

Diese elliptische Schwingung lässt sich aber nach einem bekannten Satz in zwei entgegengesetzt gerichtete cirkulare zerlegen; die wirkliche elliptische Schwingung ist sonach äquivalent mit einer geradlinigen Schwingung parallel zu den Kraftlinien und zwei entgegengesetzt gerichteten cirkularen in einer zu den Kraftlinien normalen Ebene, die sämtlich die gleiche Periode besitzen.

Nun liefert nach den Grundvorstellungen der Lorentzschen Theorie die fortschreitende Bewegung der Ionen den elektrischen Strom; das betrachtete schwingende Ion ergiebt sonach ausser einem geradlinigen Strom von wechselnder Intensität und Richtung, zwei entgegengesetzt gerichtete Kreisströme konstanter Stärke in einer zu dem ersteren normalen Ebene.

Die Wirkung eines Magnetfeldes auf ein Stromelement wird durch das Biot-Savartsche Gesetz und die Ampèresche Regel bestimmt. Hiernach erleidet ein der magnetischen Kraft R paralleles Stromelement ids seitens des Feldes überhaupt keine Einwirkung, ein dazu normales eine Kraft von der Grösse $Rids$, die senkrecht sowohl zu dem Stromelement als zu den Kraftlinien steht und deren Richtungssinn die ausgestreckte linke Hand einer mit dem Strom schwimmenden, in der Richtung der Kraftlinien blickenden Figur angiebt.

Die geradlinige Schwingung parallel zu den Kraftlinien erleidet hiernach durch das Magnetfeld keine Änderung; die beiden cirkularen sind dagegen neuen Kräften unterworfen, die, als dem Radius parallel, sich der ursprünglichen Centralkraft additiv oder subtraktiv kombinieren. Im ersten Falle wird die Periode der Schwingung nach dem oben Gesagten verkleinert, im letzteren vergrössert.

Eine einfache geometrische Überlegung zeigt, dass ein positives Ion, das in positiver Richtung, und ebenso ein negatives, das in negativer Richtung die magnetische Kraft umkreist, eine Vergrösserung der Umlaufszeit, dagegen ein negatives Ion, das in positiver, und ein positives Ion, das in negativer Richtung die Kraft umkreist, eine Verkleinerung der Umlaufszeit erfährt.

Wir wollen uns aus später hervortretenden Gründen auf den Fall eines negativen Ion beschränken. Dann lässt sich das erhaltene Resultat dahin zusammenfassen, dass die aus den ursprünglichen durch die Wirkung des Magnetfeldes entstandenen Schwingungskomponenten nicht mehr dieselbe Periode τ besitzen, sondern dass die positiv rotierende Komponente eine kleinere (τ_1), die negativ rotierende eine grössere (τ_3) hat, als die geradlinige (τ_2), welche allein die ursprüngliche Periode τ beibehält. Die nebenstehende Figur 1 veranschaulicht dies Verhältnis.

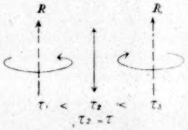

Fig. 1.

Diese Überlegung erklärt nun einerseits, die von Zeeman beobachtete Verbreiterung der Linien des Emissionsspektrums, denn es finden eben neben der ursprünglichen Periode noch grössere und kleinere statt; sie signalisiert aber ausserdem ganz neue Erscheinungen, deren Aufsuchung der Beobachtung zufällt. Zunächst ergiebt sie, dass die Lichtquelle im Magnetfelde nicht etwa alle möglichen, der ursprünglichen benachbarten Schwingungsperioden annimmt, sondern neben jener nur noch eine grössere und eine kleinere; die Quelle wird also, statt des ursprünglichen einfarbigen, nun dreifarbiges Licht aussenden. Diese drei Farben entsprechen aber drei ganz bestimmten und untereinander verschiedenen Schwingungsformen, die sich im Polarisationszustande des ausgesandten Lichtes geltend machen müssen.

Betrachten wir zuerst die Strahlen, die parallel mit den Kraftlinien des Feldes fortschreiten. Wie man immer den Mechanismus der Übertragung der Bewegung der Ionen auf den Lichtäther sich vorstellen möge, soviel ist nach Symmetrie klar, dass die Schwingungen (1) und (3) parallel zu $+R$ cirkulare Schwingungen der elektrischen Kraft im Äther, d. h. also cirkularpolarisiertes Licht, von positiver und von negativer Rotationsrichtung (vom Beschauer aus beurteilt) erregen, und parallel $-R$ solches von entgegengesetzten Rotationsrichtungen aussenden müssen. Die Bewegung (2) könnte sich aus gleichem Grunde parallel mit R nur als longitudinale Schwingung fortpflanzen, und da eine solche in Lichtwellen unter den hier vorliegenden Umständen nicht auftritt, so haben wir uns vorzustellen, dass sie sich parallel mit R nicht merklich fortpflanzt.

Die gleiche Überlegung ergiebt, dass senkrecht zu R geradlinige Schwingungen elektrischer Kraft fortgepflanzt werden müssen,

1) P. Zeeman, Vers. Kon. Akad. v. Wet. Amst. November 1896; Comm. Leiden No. 33, 1896.

und zwar wird bei den von (1) und (3) herrührenden Wellen die schwingende elektrische Kraft normal, bei den von (2) bewirkten aber parallel mit R liegen.

Da nun nach den Grundvorstellungen der elektromagnetischen Lichttheorie die sogenannte Polarisationsrichtung jederzeit normal steht zu der Richtung der schwingenden elektrischen Kraft, so ergiebt sich folgendes Gesamtresultat:

Wenn die zu Grunde gelegte Vorstellung der Wirklichkeit entspricht, so muss eine ursprünglich monochromatische Flamme mit der Schwingungsperiode τ im Magnetfelde aussenden:

a) parallel zu den Kraftlinien zwei entgegengesetzt rotierende cirkularpolarisierte Wellen von den Perioden

τ_1 und τ_3 wobei $\tau_1 < \tau < \tau_3$ ist,

b) normal zu den Kraftlinien zwei parallel zu R polarisirte von den Perioden τ_1 und τ_3 und eine senkrecht zu R polarisierte von der Periode τ_2, wobei

$\tau_2 = \tau$, $\tau_1 < \tau < \tau_3$ ist.

Ist das schwingende Ion ein negatives, so muss die positiv rotierende Welle die kleinere Periode besitzen.

Sind τ_1, τ_2, τ_3 nur sehr wenig voneinander verschieden, so werden sich bei spektraler Zerlegung die drei ihnen entsprechenden Farben nicht merklich sondern, es wird nur eine Verbreiterung der ursprünglichen Spektrallinien eintreten; aber die äusseren Ränder derselben werden denjenigen Polarisationszustand zeigen müssen, der für die äusseren Farben charakteristisch ist.

Zeeman hat diese aus der Lorentzschen Theorie sich ergebenden Folgerungen durch die Beobachtung geprüft und eine vollständige Bestätigung erhalten; zugleich schloss er aus dem Sinne der Rotation an den beiden Rändern des parallel zu den Kraftlinien erhaltenen Spektralstreifens, dass negative Ionen die Schwingungsbewegungen in der Flamme ausführen müssten, damit das beobachtete Resultat einträte. Dies Ergebnis besitzt ein besonderes Interesse, weil nach den Beobachtungen die Ansicht grosse Wahrscheinlichkeit hat, dass die sogenannten Kathodenstrahlen aus äusserst kleinen, negativ elektrisierten Massenteilchen bestehen, die sich in der Strahlenrichtung mit grosser Geschwindigkeit fortbewegen.

Die vorstehende, mehr überschlägige Betrachtung des ganzen Vorganges der Lichtemission im Magnetfelde mag, um auch die quantitativen Verhältnisse klarzustellen, nunmehr noch durch die Mitteilung der Lorentzschen Formeln ergänzt werden. Bezeichnen für ein Ion x, y, z die Koordinaten relativ zur Ruhelage, m die ponderable Masse, e die elektrische Ladung, k^2 eine für die Einwirkung der ponderabeln Teile charakteristische Konstante, und ist R die Grösse der magnetischen Feldstärke, so gelten bei Benutzung eines Koordinatensystems, dessen Z-Axe zu R parallel ist, nach Lorentz die folgenden Bewegungsgleichungen:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x - eR\frac{dy}{dt},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -k^2y + eR\frac{dx}{dt}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = -k^2z.$$

Für die Schwingungsperioden τ_1, τ_2, τ_3 der oben beschriebenen Schwingungen folgt hieraus (angenähert)

$$\tau_1 = \frac{2\pi\sqrt{m}}{k}\left(1 - \frac{eR}{2k\sqrt{m}}\right), \quad \tau_2 = \frac{2\pi\sqrt{m}}{k},$$

$$\tau_3 = \frac{2\pi\sqrt{m}}{k}\left(1 + \frac{eR}{2k\sqrt{m}}\right);$$

es ist also

$$\tau_2 - \tau_1 = \tau_3 - \tau_2 = \frac{\pi eR}{k^2} = \frac{eR}{4\pi m}\tau^2,$$

wobei $\tau = \tau_2$ die Periode bezeichnet, die verschwindender Feldstärke R entspricht. Die Grösse der „Zerlegung der Spektrallinien“ wird durch

$$\tau_3 - \tau_1 = \frac{eR}{2\pi m}\tau^2$$

gemessen; sie giebt sich also nach der elementaren Lorentzschen Theorie, wenn man, wie gewöhnlich geschieht, e und m als universelle Konstanten betrachtet, mit der Feldstärke und mit τ^2, dem Quadrat der ursprünglichen Periode, proportional.

Die Beobachtung von $\tau_3 - \tau_1$, τ und R gestattet nach der letzten Formel in überaus einfacher Weise die Berechnung des theoretisch höchst interessanten Verhältnisses e/m, d. h. der elektrischen Ladung zu der ponderabeln Masse des Ions.[1]) —

Bei den ersten Zeemanschen Versuchen war die geringe Grösse der Unterschiede zwischen den drei Perioden τ_1, τ_2, τ_3 der Beobachtung sehr hinderlich; eine wirklich endgültige Prüfung der Resultate der Theorie war offenbar erst dann geliefert, wenn es gelang, die zwei resp. drei Wellen verschiedener Farbe und verschiedenen Polarisationszustandes spektral vollständig zu trennen.

König[2]) suchte dem Phänomen eine grössere Deutlichkeit dadurch zu geben, dass er mittels eines geeignet angebrachten doppeltbrechenden Prismas zwei Bilder derselben Spektrallinie mit

1) Weitere theoretische Überlegungen auf Grund der Lorentzschen Theorie stellten J. Larmor (Phil. Mag. (5) 44, S. 503, 1897) und L. Hoppe (Math. Ges. Hamburg 3, S. 319, 1898) an.

2) W. König, Wied. Ann. 62, S. 240; 63, S. 268, 1897.

geradlinigen und zwar senkrecht zu einander liegenden, oder aber mit cirkularen und entgegengesetzt rotierenden Schwingungen direkt übereinander erzeugte. Bei Einwirkung des Magnetfeldes auf die Lichtquelle verschoben sich dann die beiden cirkularpolarisierten Streifen ein wenig gegeneinander, von den linearpolarisierten wurde der eine verbreitert, der andere blieb ungeändert.

Zeeman dagegen gelang es, direkt die vollständige Trennung der Komponenten durch Verstärkung des Magnetfeldes und der optischen Hilfsmittel, insbesondere aber durch Wahl einer geeigneten Lichtquelle zu erreichen.[1]) Die verschiedenen Lichtquellen zeigen nicht nur an sich das Phänomen in verschiedener Stärke, sie verhalten sich auch bezüglich der sekundären störenden Einflüsse verschieden, und gerade die am leichtesten herstellbare Natriumflamme hat sich wegen der leichten Verbreiterung und Selbstumkehrung ihrer Spektrallinien durch thermische Einflüsse als weniger günstig erwiesen.

Das reguläre Duplet (parallel den Magnetkraftlinien) und das reguläre Triplet (normal dazu) hat Zeeman zuerst bei der blaugrünen Linie ($\tau = 4{,}80 \,.\, 10^{-5}$) des Kadmium-Spektrums herstellen können. Die Komponenten zeigten wirklich die von der Theorie verlangten Polarisationszustände.

Die genannte Kadmiumlinie gestattete die Grösse der Zerlegung und somit die Differenz $\tau_3 - \tau_1$ sogar recht genau zu messen,[1]) und die Benutzung der oben angegebenen Formel lieferte bei Voraussetzung absoluter elektrostatischer Einheiten für das Verhältnis e/m den Wert $1{,}6 \,.\, 10^7$. Es ist bemerkenswert, dass diese Zahl von derselben Grössenordnung ist, wie die aus den Messungen über magnetische Ablenkungen von Kathodenstrahlen für jenes Verhältnis geschlossene. —

(Fortsetzung im nächsten Heft.)

1) P. Zeeman, Phil. Mag. (5) 44, S. 55, 1897.

1) P. Zeeman, Phil. Mag. (5) 45, S. 197, 1898.

REFERATE.

Instrumentenkunde.

Besorgt von Prof Dr **L. Ambronn.**

Im Laufe des vergangenen Sommers hat sich durch Vereinigung einer Anzahl Göttinger Mechaniker und unter lebhafter Beteiligung der dabei interessierten Lehrer der Universität und des Gymnasiums ein Verein gebildet, welcher gleichzeitig als Zweigverein der grossen Deutschen Gesellschaft für Mechanik und Optik von dieser im August in Jena anerkannt worden ist. Es werden allmonatlich Sitzungen abgehalten, in denen sowohl Vorträge aus der Praxis, als auch solche aus dem Gebiete der Physik, Chemie oder Astronomie abwechslungsweise gehalten werden sollen. Naturgemäss waren die ersten Vereinsabende mehr organisatorischen Besprechungen und Wahlen des Vorstandes u. s. w. gewidmet. Am 3. November aber hielt Herr Brunnée einen Vortrag über die Herstellung feiner Teilungen auf Glas, welche teils als Probe-Objekte oder als Mikrometer für die Zwecke der Mikroskopie dienen sollen, zum Teil aber auch als Interferenzgitter zur spektralen Zerlegung des Lichtes Benutzung finden. An die Erläuterung der bei solchen Teilungen vom Vortragenden verwendeten Maschine knüpfte derselbe interessante Bemerkungen über das Verfahren, welches er bei seinen Teilungen befolgt. Diese Arbeit muss häufig während Tag und Nacht fast ununterbrochen fortgesetzt werden, wenn ein tadelloses Gitter von besonderer Feinheit erzielt werden soll. Der Vortragende zeigte solche Gitter vor, bei denen bis zu 1000 Linien auf das Intervall eines Millimeters kommen. Durch Aufstellung einiger Mikroskope war Gelegenheit gegeben, die Gitter bei starker Vergrösserung zu betrachten. Herr Brunnée machte noch auf die Schwierigkeiten, die solchen Teilungen aus der oft nicht guten Beschaffenheit der benutzten Glasplatten entstehen, aufmerksam, und auf die Sorgfalt, mit welcher die Auswahl der zum Einreissen der äusserst feinen und zarten Linien nötigen Diamantsplitter getroffen werden muss. Eine längere Discussion schloss sich an den Vortrag, an der sich Praktiker und Gelehrte gleicherweise lebhaft beteiligten. L. A.

Tagesereignisse.

Der Grossherzog von Hessen-Darmstadt hat an seinem Geburtstage der Technischen Hochschule zu Darmstadt das Recht gewährt, den Dr. Ing. zu verleihen,

Für die Redaktion verantwortlich Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.